Solusi Persamaan Schrodinger dengan Potensial Scraf II Hyperbolic menggunakan Pendekatan Semiklasik

Ahmad Aftah Syukron [a], dan Isnaini Lilis Elviyanti [b]

[a,b]*Universitas Ma'arif Nahdlatul Ulama Kebumen, Indonesia*
dfata.aftah@gmail.com

Abstrak

Sistem partikel yang tidak dibolehkan berada dalam daerah sistem klasik diaplikasikan pada persamaan Schrodinger. Sistem partikel tersebut dipengaruhi oleh potensial Scraf II Hyperbolic. Solusi penyelesaian persamaan Schrodinger dengan potensial Scraff II Hyperbolic menggunakan pendekatan semiklasik yaitu menggunakan pendekatan WKB. Pendekatan WKB digunakan untuk memperoleh persamaan spektrum energi yang dipengaruhi oleh potensial Scraf II Hyperbolic.

Kata kunci: Persamaan Schrodinger, potensial Scraf II Hyperbolic, Pendekatan WKB

Abstract

The particle system is affected by the Scraf II Hyperbolic potential. The solution for solving the Schrodinger equation with the Scraff II Hyperbolic potential uses a semiclassical approach, namely using the WKB approach. The WKB approach is used to obtain an equation for the energy spectrum that is affected by the Scraf II Hyperbolic potential.

Keywords*: The Schrodinger equation, Hyperbolic Scraf II potential, WKB approach*

1. Pendahuluan

Persamaan Schrodinger merupakan persamaan yang digunakan untuk menjelaskan sifat atau keadaan suatu partikel melalui spektrum energi dan fungsi gelombang. Persamaan Schrodinger menjelaskan partikel dalam kondisi non-relativistik (Suparmi, 2011). Sistem partikel yang dipengaruhi suatu potensial seperti Scraf Hyperbolic (Deta et al, 2014), Hulten (Elviyanti et al, 2018), cotangen hyperbolic (Elviyanti, 2017., Elviyanti, 2020), hyperbolic Scraff I (Suparmi et al, 2016), Scraff trigonometric (Widiyanto et al, 2017., Pratiwi, et al, 2016), Coloumb (Dianawati et al, 2017), dan lain sebagainya dapat diselesaikan dengan metode dalam mekanika kuantum. Dalam mekanika kuantum persamaan Schrodinger dapat diselesaikan menggunakan metode Hipergeometri (Nurhayati et al, 2012., Elviyanti et al, 2017), *Nikiforov-Uvarof* (Deta et al, 2014., Elviyanti et al, 2020), *Asymtotic Iteration Method* (Pratiwi et al, 2016, Elviyanti et al, 2018), dan *SUSY* (Suparmi dkk, 2016). Sementara, apabila suatu partikel dalam keadaan dipengaruhi oleh medan dengan energi dan potensial yang berubah secara lambat sehingga panjang gelombang terdefinisi dengan baik pada sekitar sembarang titik, maka persamaan Schrodinger diselesaikan dengan pendekatan semiklasik (Suparmi, 2011). Pendekatan semiklasik disebut dengan pendekatan WKB.

Pendekatan WKB (Wentzel, Kramer, dan Brillouin) merupakan pendekatan semiklasik yang sesuai untuk partikel yang tidak berada di daerah partikel bersifat klasik. Dengan istilah lain, pendekatan WKB sesuai untuk sistem partikel yang dipengaruhi oleh medan dengan energi potensial yang berubah secara lambat dalam rentang beberapa Panjang gelombang dan untuk kondisi energi kinetik yang kurang dari energi potensial (E<V) (Suparmi, 2011). Fungsi pendekatan WKB yaitu untuk menentuan koefisien transimi sistem partikel yang menerobos potensial tanggul, dimana potensial tanggul yang lebar seperti medan emisi elektron pada logam dan penetrasi medan Coloumb dari nukleus partikel yang bermuatan positif. Selain untuk sistem kuantum satu dimensi, Pedekatan WKB dapat juga untuk sistem kuantum tiga dimensi yang dapat diuraikan dalam beberapa sistem kuantum satu dimensi. permisalan untuk sistem kuantum tiga dimensi yaitu berbentuk bola simetris yang diterapkan pada persamaan Schrodinger sehingga sistem tersebut dapat diuraikan menjadi persamaan differensial bagian radial dan sudut. Bagian persamaan differensial tersebut dianggap sebagai persamaan differensial untuk sistem kuantum satu dimensi. Ada beberapa potensial yang tingkat energinya dapat ditentukan secara eksak dengan pendekatan WKB yang telah dikoreksi dengan koreksi Langer antara lain potensial Coloumb, Poschl-Teller, Gendensthein, Maning Rosen, dan Morse (Suparmi, 2011).

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui perilaku partikel yang tidak mungkin berada pada daerah ditemukan partikel bersifat klasik saat dipengaruhi potensial Scraf II hyperbolic. Batasan pada penelitian ini yaitu hanya pada persamaan Schrodinger bagian radial yang diselesaikan dengan pendekatan WKB untuk memperoleh persamaan spektrum energi.

2. Metodologi Penelitian

Dalam penelitian ini, persamaan Schrodinger yang dipengaruhi potensial Scraf II hyperbolic diselesaikan menggunakan pendekatan WKB. Potensial Scraf II hyperbolic dapat ditulis sebagai berikut (Widiyanto, 2017) :

$$V(x) = \hbar / 2m \left[(p^2 + q(q+1) / \sin h^2 x) - (2p(q + ½) \cos h\, x) / \sin h^2 x) \right] \tag{1}$$

Dimana p dan q adalah bilangan real positif. Persamaan Schrodinger secara umum dalam satu dimensi yaitu :

$$d^2 \psi / d x^2 + 2m / \hbar^2 \, [E - V(x)] \, \psi(x) = 0 \tag{2}$$

dimana E adalah energi kinetik dan $V(x)$ adalah energi potensial. Apabila sistem partikel dipengaruhi potensial terkungkung maka ada tiga keadaan yaitu $E > V(x)$ untuk partikel bergerak secara klasik, $E < V(x)$ untuk partikel dilarang bergerak secara klasik, dan $E = V(x)$ untuk titik batas keduanya (titik balik) (Suparmi, 2011). Penentukan tingkat energi partikel yang bergerak di daerah yang dipengaruhi oleh energi potensial ($V(x)$), dimana ($V(x)$) berubah secara perlahan maka perubahan panjang gelombang secara relativ dalam jarak sangat kecil bila dibandingkan dengan satu satuan untuk kondisi $E = V(x)$ dan $E < V(x)$, maka pendekatan WKB dapat diaplikasikan pada 3 daerah yang dipisahkan oleh titik-titik balik klasik, tetapi tidak valid untuk titik yang sangat dekat dengan titik balik (Suparmi, 2011). Pada saat sistem berada pada titik balik klasik maka persamaan Schrodinger yang ditunjukkan persamaan (2) berubah menjadi:

$$-(\hbar^2 / 2m)(d^2\psi / dx^2) + g[x-a]\ \psi(x) = 0 \tag{3}$$

$$-(\hbar^2 / 2m)(d^2\psi / dx^2) + g'[x-b]\ \psi(x) = 0 \tag{4}$$

dimana a dan b adalah titik balik klasik, Penyelesaian persamaan (3) dan (4) didekati dengan bentuk airy intergral $Ai(\xi)$ yaitu:

$$\xi_a = (x-a)(2m\,g / \hbar^2)^{1/3} \tag{5}$$
$$\xi_a = (x-b)(2m\,g' / \hbar^2)^{1/3} \tag{6}$$

lalu penyelesaian Persamaan (5) dan (6) diperluas kedalam daerah x < a dan x > b, maka penyelesaiannya mendekati bentuk *asymtot* yaitu

$$Ai(\xi_a) = (1 / \sqrt{\pi}\,(-\xi_a)^{1/4})\sin[2/3\,(-\xi_a)^{3/2} + \pi/4] \tag{7}$$

$$Ai(\xi) = (1 / \sqrt{\pi}\,(-\xi_b)^{1/4})\sin[2/3\,(-\xi_b)^{3/2} + \pi/4] \tag{8}$$

sedangkan untuk daerah x < a dekat dengan titik x = a serta daerah x < b dekat dengan titik x = b maka berlaku:

$$\int k(x')\,dx' = 1/\hbar \int_x^a \sqrt{2\mu g[a-x']}\,dx' = 2/3\,(-\xi_b)^{3/2} \tag{9}$$

$$\int k(x')\,dx' = 1/\hbar \int_x^a \sqrt{2\mu g[x'-b]}\,dx' = 2/3\,(-\xi_b)^{3/2} \tag{10}$$

maka penyelesaian persamaan (9) dan (10) yang diperluas kedalam daerah x < a dan x < b adalah menggunakan kombinasi penyelesaian positif dan negatif berikut:

$$\psi_+(x) = C_1\sqrt{(K(x_0)/K(x_0))}\,e^{(\int(K(x')\,dx')} \tag{11}$$

$$\psi_-(x) = C_2\sqrt{(K(x_0)/K(x_0))}\,e^{(-\int(K(x')\,dx')} \tag{12}$$

dengan menggunakan persamaan (11) dan (12) yang diterapkan pada persamaan (9) dan (10), maka diperoleh :

$$\sin[-\int_a^x k(x')\,dx' + \pi/4] = \sin[\int_b^a k(x')\,dx' - \int_b^x k(x')\,dx' + \pi/4] \tag{13}$$

$$\sin[-\int_a^x k(x')\,dx' + \pi/4] \tag{14}$$

untuk daerah antara a dan b, maka persamaan (13) dan (14) harus diberi harga yang sama, dimana keduanya dikalikan dengan *amplitude* positif atau negatif, prasyarat agar keduanya sama yaitu

$$\sin[\int_b^a k(x')\,dx' - \int_b^x k(x')\,dx' + \pi/4] = \pm\sin[\int_a^x k(x')\,dx' + \pi/4] \tag{15}$$

Penyelesaian persamaan (15) dapat menggunakan $\sin P = \pm \sin Q$, maka diperoleh $P + Q = m\pi$ atau $P - Q = m\pi$, dimana $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Harga $P - Q = m\pi$ dari persamaan (15) dapat diperoleh:

$$\int_b^a k\,(x')\,dx' - 2\int_b^x k\,(x')\,dx' = m\pi \qquad (16)$$

harga persamaan (16) tidak memenuhi syarat karena perlu fungsi *x* berharga konstan. Sementara, harga $P + Q = m\pi$, untuk persamaan (15) maka diperoleh,

$$\int_b^a k\,(x')\,dx' = (n + ½)\,\pi \qquad (17)$$

untuk $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Untuk $k\,(x')$ merupakan akar persamaan energi dari persamaan (2), sehingga harga $k\,(x')$ yaitu

$$k\,(x') = 1/\hbar\,\sqrt{}\,2m\,[\,E - V\,(x)\,] \qquad (18)$$

persamaan (18) merupakan kondisi kuantiasi suatu sistem kuamtum yang dijabrakan secara semiklasik dan digunakan untuk memberikan harga pendekatan tingkat – tingkat energi suatu sistem. maka persamaan (18) dapat ditulis menjadi,

$$\int_b^a 1/\hbar\,\sqrt{}\,2m\,[\,E - V\,(x)\,]\,dx' = (n + ½)\,\pi \qquad (19)$$

Persamaan (19) merupakan pendekatan semiklasik (pendekatan WKB) untuk mengestimasi tingkat – tingkat energi suatu sistem. Penyelesaian pendekatan WKB dengan menggunakan titik – titik balik klasik sedikit kurang baik namum hasilnya cukup sederhana (Suparmi, 2011).

3. Hasil Dan Pembahasan

Persamaan Schrodinger yang telah didekati dengan pendekatan WKB pada persamaan (19) disubstitusi dengan potensial Scraf II hyperbolic pada persamaan (1), sehingga persamaan Schrodinger yang dipengeruhi potensial Scraf Hyperbolic menjadi,

$$\int_b^a \sqrt{}\,E - \hbar^2/2m\,[\,(\,p^2 + q\,(q+1)/\sin h^2 x\,) - (\,2p\,(q + ½)\cos h\,x/\sin h^2 x\,)\,]\,dx$$
$$= \hbar/(\sqrt{}\,2m)\,(n + ½)\,\pi \qquad (20)$$

Kemudian untuk menyederhanakan Persamaan (20) dilakukan permisalan yaitu mengubah $x = z$, dan $\cos h\,x = z$, dan menyamakan penyebut dari persamaan (20) sehingga diperoleh persamaan,

$$\int_b^a \sqrt{}\,(\,E - E\,z^2 - \hbar^2/2m\,(\,p^2 + (q + ½)^2\,) + \hbar^2/2m\,(\,2p\,(q + ½)\,y\,)\,)\,dz/1 - z^2$$
$$= \hbar/(\sqrt{}\,2m)\,(n + ½)\,\pi \qquad (21)$$

Dimana penjabaran persamaan yaitu $dz/1 - z^2 = (\,dz/2\,(1 - z)\,) + (\,dz/2\,(1 + z)\,)$, maka Persamaan (21) menjadi,

$$[\,\int_b^a \sqrt{}\,(\,E - E\,z^2 - \hbar^2/2m\,(\,p^2 + (q + ½)^2\,) + \hbar^2/2m\,(\,2p\,(q + ½)\,y\,)\,)\,dz/1 - z^2\,] \qquad (22)$$

$$+ [\int_b^a \sqrt{ (E - E z^2 - \hbar^2 / 2m (p^2 + (q + ½)^2) + \hbar^2 / 2m (2p (q + ½) y)) } dz / 1 - z^2]$$

$$= \hbar / (\sqrt{2m}) (n + ½) \pi$$

Langkah selanjutnya yaitu menyesuaikan Persamaan (22) dengan pendekatan WKB, maka penjabaran di persamaan (22) dimisalkan $x = (1 - z)$ dan $y = (1 - z)$, sehingga dihasilkan,

$$[½ \int_b^a \sqrt{ - E x^2 + (2E - \hbar^2 / 2m (2p (q + ½)) x + \hbar^2 / 2m (2p (q + ½) - (p^2 (q - ½)^2)) } dx/x]$$
$$+ [½ \int_b^a \sqrt{ - E x^2 + (2E - \hbar^2 / 2m (2p (q + ½)) y + \hbar^2 / 2m (2p (q + ½) - (p^2 (q - ½)^2)) } dy/y] \quad (23)$$
$$= \hbar / (\sqrt{2m}) (n + ½) \pi$$

Persamaan (23) sudah seperti bentuk pendekatan WKB yang ditunjukkan oleh persamaan (24), sebagai berikut,

$$\int \sqrt{R} \, d\rho / \rho \quad (24)$$

Dengan penjabaran $R = d + e x + f x^2$, kemudian bentuk penyelesaian dari persamaan (13) yaitu dengan 3 langkah yang ditunjukkan oleh persamaan (25) – (27), yaitu

$$\int \sqrt{R} \, d\rho / \rho = \sqrt{R} + e / 2 \int d\rho / \sqrt{R} + d \int d\rho / (\rho \sqrt{R}) \quad (25)$$

$$\int d\rho / \sqrt{R} = (1 / \sqrt{-f}) \sin^{-1} [2 f p + e / \sqrt{e^2 - 4 d f}] \quad (26)$$

$$\int d\rho / \rho \sqrt{R} = (1 / \sqrt{-d}) \sin^{-1} [e \rho + 2d / |\rho| \sqrt{e^2 - 4 d f}] \quad (27)$$

Dengan menggunakan persamaan (25) – (27) untuk menyelesaikan persamaan (24), agar perhitungan lebih sederhana maka masing-masing faktor dihitung dengan mencari akar-akarnya, dan dihasilkan persamaan (28)

$$- [(\hbar^2 / 2m (p (q + ½)) / \sqrt{E}) + (\hbar^2 / 2m (p^2 (q + ½)^2) / \sqrt{ ((\hbar^2 / 2m (2p (q + ½)) + (p^2 (q + ½)^2)) }] = \hbar / (\sqrt{2m}) (n + ½) \quad (28)$$

kemudian untuk memperoleh persamaan spektrum energi persamaan 28 diubah menjadi,

$$E = [(\hbar^2 / 2m (p (q + ½))) \sqrt{ ((\hbar^2 / 2m (2p (q + ½)) + (p^2 (q + ½)^2)) } / (\hbar / \sqrt{2m}) (n + ½) (\sqrt{ ((\hbar^2 / 2m (2p (q + ½)) + (p^2 (q + ½)^2)) } - (\hbar^2 / 2m (p^2 (q + ½)^2)] \quad (29)$$

Persamaan 29 merupakan persamaan spektrum energi pada persamaan Schrodinger untuk potensial Scraf II hyperbolic menggunakan pendekatan WKB.

4. Kesimpulan

Pendekatan WKB telah diterapkan persamaan Schrodinger untuk potensial Scraf hyperbolic. pendekatan WKB telah sesuai dengan penurunan persamaan Schrodinger satu dimensi. Hasil spekrum energi persamaan Schrodinger untuk potensial Scraf II hyperbolic dipengaruhi oleh bilangan real positif.

DAFTAR PUSTAKA

Deta, U. A., Suparmi, A., & Cari, C. (2014). Approximate solution of schrodinger equation in d-dimensions for scarf hyperbolic plus non-central poschl-teller potential using nikiforov-uvarov method. *Journal of Physics: Conference Series* **539** 012018. doi: 10.1088/1742-6596/539/1/012018

Dianawati, D A., Suparmi, A., dan Cari, C. (2018). Solution of Schrodinger equation with qdeformed momentum in Coulomb potential using hypergeometric method. AIP Conference Proceedings 2014, 020071 (2018); https://doi.org/10.1063/1.5054475

Elviyanti, I L., Pratiwi, B N., Suparmi, A., dan Cari, C. 2018. The application of minimal length in Klein-Gordon equation with Hulthen potential using asymptotic iteration method. *Advances in Mathematical Physics 2018.* https://doi.org/10.1155/2018/9658679

Elviyanti, I L, dan Syukron A A. 2020. The minimal length case of the Klein Gordon equation with hyperbolic cotangent potential using Nikivorof-Uvarof Method. *Journal of Physics: Theories and Applications 4 (1), 1-7*

Elviyanti, I L., A Suparmi, A., Cari, C., Nugraha, D A., dan Pratiwi, B N .2017. Solution of Klein Gordon equation for hyperbolic cotangent potential in the presence of a minimal length using Hypergeometric method,*Journal of Physics: Conference Series 909 (1), 012023*

Nurhayati, Suparmi, Variani, V. I., Cari, & Wahyudi (2012). Analisis fungsi gelombang dan spektrum energi potensial gendensthein ii menggunakan metode hipergeometrik. *Prosiding Pertemuan Ilmiah XXVI HFI Jateng & DIY,* 229

Pratiwi, B. N., Suparmi, A., Cari, C., Husein, A. S., & Yunianto, M. (2016). Approximate analytical solution of the Dirac equation for pseudospin symmetry with modified Poschl-Teller potential and trigonometric Scarf II non-central potential using asymptotic iteration method. *Journal of Physics: Conference Series* **739** 012020. doi: 10.1088/1742-6596/739/1/012020

Suparmi (2011). *Mekanika kuantum II*. Surakarta: UNS Press

Suparmi, A., Cari, C., Deta U. A., & Handika, J. (2016). Energy analysis of four dimensional extended hyperbolic Scarf I plus three dimensional separable trigonometric non-central potentials using SUSY QM approach. *Journal of Physics: Conference Series* **776** 012077. doi: 10.1088/1742-6596/776/1/012077

Widiyanto, F., A, Suparmi, C. Cari., Anwar, F., dan Yunianto, M. (2017). Schrödinger equation solution for q-deformed Scarf II potential plus Pöschl-Teller potential and trigonometric Scarf potential. *J. Phys.: Conf. Ser.* 909 012036